Combinatoire pour les Algèbres de Iwahori-Hecke finies

Alexandre Esterle

Jeudi 27 Avril

Sommaire

Définition des groupes de Coxeter

Définition

Soit W un groupe, S un système générateur de W formé d'éléments d'ordre 2. Pour s, s' dans S, on note $m_{s,s'}$ l'ordre de ss'.
On dit que (W, S) est un système de Coxeter si
$< S | \forall s \in S, \forall s' \in S \setminus \{s\}, s^2 = 1,\ (ss')^{m_{ss'}} = 1 >$ *est une présentation du groupe W.*

Définition

Le graphe de Coxeter associé à un système de Coxeter (W, S) est le graphe dont les sommets sont les éléments de S et deux sommets s et t sont reliés par $m_{s,t} - 2$ arêtes pour $m_{s,t} \leq 4$, trois arrêtes si $m_{s,t} = 6$ une arête avec $m_{s,t}$ en indice sinon.

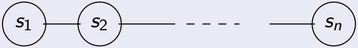
Classification des groupes de Coxeter

Définition

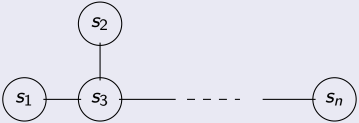
On dit qu'un groupe de Coxeter est irréductible s'il n'existe pas deux parties disjointes non vides S_1 et S_2 de S telles que $S = S_1 \cup S_2$ avec $s_1 s_2 = s_2 s_1$ pour tout couple $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

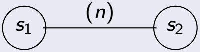
Théorème (Coxeter 33')

Le graphe d'un groupe de Coxeter fini irréductible appartient à l'une des familles suivantes :

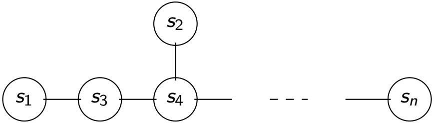
1. $n \geq 1, A_n$: 

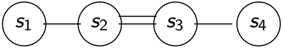
2. $n \geq 1, B_{n+1}$: 

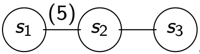
3. $n \geq 3, D_n$: 

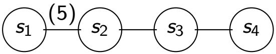
4. $n \geq 5, I_2(n)$: 

Classification des groupes de Coxeter

1. $n \in \{6, 7, 8\}$, E_n : 

2. F_4 : 

3. H_3 : 

, H_4 : 

Le groupe symétrique

Proposition

Pour $n \geq 2$, le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i i+1)$ pour i allant de 1 à $n-1$.
Elles vérifient les relations suivantes :

1. *Si* $|i-j| = 1, s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$.
2. *Si* $|i-j| \geq 2, s_i s_j = s_j s_i$.

Proposition

Le groupe de Coxeter de type A_n est le groupe symétrique S_{n+1}.

Partitions de n

Définition

Pour $n \geq 1$, une partition de n est une suite décroissante d'entiers naturels dont la somme des termes vaut n.

Proposition

Le nombre de classes de conjugaisons du groupe symétrique S_n est égal au nombre de partitions de n.

Tableaux standards

Définition

A toute partition $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ on associe un diagramme appelé diagramme de Young ayant λ_i cases à la ième ligne.
Un tableau de Young est un diagramme de Young où l'on a rempli toutes les cases avec des nombres allant de 1 à n.
Un tableau standard est un tableau de Young où les nombres sont rangés de manière croissante suivant les lignes et les colonnes.

Théorème

L'ensemble des caractères irréductibles sur $\mathbb{C}$ de S_n est en bijection avec les partitions de n et le degré du caractère associé à la partition λ est égal au nombre de tableaux standards associés à λ.

Exemple :
$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ donc S_4 a 5 caractères irréductibles et les degrés sont $1, 3, 2, 3$ et 1.

Groupe de Artin associé à un groupe de Coxeter

Définition

Soit (W, S) un système de Coxeter fini. Au groupe de Coxeter W, on associe le groupe de Artin $\mathcal{A}_W$ avec la présentation suivante où l'on a "oublié" la relation d'ordre 2 sur les générateurs : $< S, \forall(s,t) \in S^2, \underbrace{sts...}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst...}_{m_{s,t}} >$

Exemples :
Le groupe de Artin $\mathcal{A}_{A_n}$ associé au groupe de Coxeter de type A_n admet la présentation suivante : $\mathcal{A}_{A_n} =< (s_i)_{i\in[|1,n|]}, s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}, |i-j| \geq 2, s_is_j = s_js_i >$.
Le groupe de Artin $\mathcal{A}_{B_n}$ associé au groupe de Coxeter de type B_n admet la présentation suivante :
$\mathcal{A}_{B_n} =< t, (s_i)_{i\in[|1,n-1|]}, ts_1ts_1 = s_1ts_1t, s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}, |i-j| \geq 2, s_is_j = s_js_i >$.

Théorème de Matsumoto

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un groupe de Artin de générateurs $\{s_i\}_{i\in[|1,n|]}$. Soit $a \in \mathcal{A}$, on dit que deux écritures $a = s_{i_k}..s_{i_1}$ et $a = s_{j_k}...s_{j_1}$ de a sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre en utilisant les relations de tresses.

Théorème (Matsumoto)

$s_{i_k}...s_{i_1}$ et $s_{j_k}...s_{j_1}$ sont deux écritures réduites du même élément du groupe de Coxeter si et seulement si elles sont équivalentes.

Définition de l'algèbre de Iwahori-Hecke

Définition

Soit (W,S) un système de Coxeter et $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p((\alpha_s)_{s\in S})$ un corps fini avec s parcourant S tel que $\alpha_s = \alpha_t \in \overline{\mathbb{F}_p}$ si s et t sont conjuguées.
La $\mathbb{F}_q$-algèbre de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}}$ associée à W est définie par

$$\mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}} =< T_1, \ldots, T_n | \underbrace{T_i T_j T_i \ldots}_{m_{s_i,s_j}} = \underbrace{T_j T_i T_j \ldots}_{m_{s_i,s_j}}, (T_i - a_{s_i})(T_i + 1) = 0 >.$$

Pour $\sigma = s_{i_k} \ldots s_{i_1} \in \mathcal{S}_n$ sous forme réduite, on pose $T_\sigma = T_{i_k} \ldots T_{i_1}$.

Théorème

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{W,q}$ est un $\mathbb{F}_q$-module libre de base $\{T_\sigma, \sigma \in W\}$.

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, p un nombre premier et $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}$ d'ordre strictement supérieur à n, on pose $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

Définition

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ est la $\mathbb{F}_q$-algèbre unitaire associative engendrée par $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ où ces générateurs vérifient les relations

1. *Pour tout $i \in [|1, n-1|]$, $(T_i - \alpha)(T_i + 1) = 0$.*
2. *Si $1 \leq i < j-1 \leq n-2$, $T_i T_j = T_j T_i$.*
3. *Pour tout $i \in [|1, n-2|]$, $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$.*

Pour $\sigma = s_{i_k} \ldots s_{i_1} \in \mathcal{S}_n$ sous forme réduite, on pose $T_\sigma = T_{i_k} \ldots T_{i_1}$.

Théorème

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ est un $\mathbb{F}_q$-module libre de base $\{T_\sigma, \sigma \in A_n\}$.

Modèle de Hoefsmit

$\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ est semi-simple déployée et on a la décomposition $\mathcal{H}_{A_n,\alpha} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{n_\lambda}(\mathbb{F}_q)$.

Définition

La représentation de Hoefsmit de $\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ est donnée par l'action ci-dessous des générateurs T_r sur les tableaux standards $\mathbb{T}$:

1. *Si r et $r+1$ sont dans la même ligne de $\mathbb{T}$ alors $T_r.\mathbb{T} = \alpha\mathbb{T}$.*
2. *Si r et $r+1$ sont dans la même colonne de $\mathbb{T}$ alors $T_r.\mathbb{T} = -\mathbb{T}$.*
3. *Sinon $T_r.\mathbb{T} = m_r(\mathbb{T})\mathbb{T} + (1 + m_r(\mathbb{T}))\mathbb{T}_{r \leftrightarrow r+1}$ où $m_r(\mathbb{T}) = \frac{(\alpha-1)}{1-\alpha^{j_r - i_r + i_{r+1} - j_{r+1}}}$ où r se trouve dans la case (i_r, j_r) et $r+1$ se trouve dans la case (i_{r+1}, j_{r+1}).*

Modèle de Hoefsmit pour le type A

Les partitions de 3 sont $(1,1,1,0,\ldots),(2,1,0,\ldots)$ et $(3,0,\ldots)$ et elles correspondent aux diagrammes suivants : $\ydiagram{1,1,1}$, $\ydiagram{2,1}$ et $\ydiagram{3}$.

On a

1. $R_{\ydiagram{1,1,1}}(T_1) = R_{\ydiagram{1,1,1}}(T_2) = (-1).$
2. $R_{\ydiagram{3}}(T_1) = R_{\ydiagram{3}}(T_2) = (\alpha).$
3. $R_{\ydiagram{2,1}}(T_1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R_{\ydiagram{2,1}}(T_2) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\alpha+1} & \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{\alpha^2}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$

Règle de Branchement

Théorème

Règle de Branchement
Pour tout $\mathbb{F}_q\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ *module simple* V_λ, *si on le considère comme un* $\mathbb{F}_q\mathcal{H}_{n-1}$ *module* $\tilde{V}_\lambda$ *avec*
$\mathbb{F}_q\mathcal{H}_{A_{n-1},\alpha} \subset \mathbb{F}_q\mathcal{H}_{A_n,\alpha}$ *engendré par les générateurs* $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2}$, *on a*

$$\tilde{V}_\lambda = \bigoplus_{\mu \subset \lambda} V_\mu .$$

Partition transposée

Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots)$ une partition de n, on note $\lambda' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l, 0, \ldots)$ sa partition transposée avec $\mu_i = max\{j \in \mathbb{N}^\star, \lambda_j \geq i\}$.
Si on note V_λ le module simple associé à λ alors on a $V_\lambda^\star \simeq V_{\lambda'}$.
Si $\lambda = \lambda'$ alors il existe une forme bilinéaire non-dégénérée sur V_λ vu comme $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel engendré par les tableaux standards telle que pour tous tableaux standards $\mathbb{T}$, $\tilde{\mathbb{T}}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $(T_i.\mathbb{T}, T_i.\tilde{\mathbb{T}}) = -\alpha(\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}})$.
La nature de la forme bilinéaire ne dépend que de la forme du diagramme de Young associé.

Dans le groupe hyperoctahédral, tous les s_i sont conjugués entre eux mais ne sont pas conjuguées à t donc on a deux paramètres α et β. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}_p}$ vérifiant des conditions et $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha, \beta)$.

Définition

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{B_n,\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{F}_q$ est la $\mathbb{F}_q$-algèbre unitaire associative générée par $T = T_0, T_1, ..., T_{n-1}$ où ces générateurs vérifient les relations

1. $(T - \beta)(T + 1) = 0.$
2. *Pour tout* $i \in [|1, n-1|], (T_i - \alpha)(T_i + 1) = 0.$
3. $TT_1TT_1 = T_1TT_1T.$
4. *Si* $0 \leq i < j-1 \leq n-2, T_iT_j = T_jT_i.$
5. *Pour tout* $i \in [|1, n-2|], T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}.$

Pour $\sigma = s_{i_k}...s_{i_1} \in B_n$ sous forme réduite, on pose $T_\sigma = T_{i_k}...T_{i_1}$.

Théorème

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{B_n,\alpha,\beta}$ est un $\mathbb{F}_q$-module libre de base $\{T_\sigma, \sigma \in B_n\}$.

Double-partitions et double-tableaux

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$,

1. *Une double-partition λ de n est un couple (λ_1, λ_2) où λ_1 est une partition de r et λ_2 est une partition de $n - r$ pour un $r \leq n$.*
2. *Le double-diagramme associé à une double partition (λ_1, λ_2) est le couple (D_1, D_2) où D_1 est le diagramme associé à λ_1 et D_2 est le diagramme associé à D_2.*
3. *Un double-tableau standard associé à une double-partition (λ_1, λ_2) est un remplissage du double-diagramme de manière croissante suivant les lignes et les colonnes dans chaque diagramme mais pas entre les deux.*

Exemple : ($\boxed{1 \mid 4}$, $\boxed{2 \mid 3}$) est un double tableau standard.

Modèle de Hoefsmit

Théorème

Le modèle matriciel suivant nous donne une décomposition en modules irréductibles V_λ *indexés par les doubles partitions de* n *de l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_{n,\alpha,\beta}$ *:*
Si $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2)$ *est un double tableau standard alors*
$T.\mathbb{T} = \beta\mathbb{T}$ *si* $1 \in \mathbb{T}_1$ *et* $T.\mathbb{T} = -\mathbb{T}$ *si* $1 \in \mathbb{T}_2$.
$T_i.\mathbb{T} = m_i(\mathbb{T})\mathbb{T} + (1 + m_i(\mathbb{T}))\mathbb{T}'$ *avec* $\mathbb{T}' = \mathbb{T}_{i\leftrightarrow i+1}$ *si* $\mathbb{T}_{i\leftrightarrow i+1}$ *est standard et* 0 *sinon.*
Avec $m_i(\mathbb{T}) = \frac{\alpha-1}{1-\frac{ct(\mathbb{T}:i)}{ct(\mathbb{T}:i+1)}}$, $ct(\mathbb{T}:j) = \alpha^{c_j(\mathbb{T})-r_j(\mathbb{T})}\beta$ *si* $j \in \mathbb{T}_1$ *et* $ct(\mathbb{T}:j) = -\alpha^{c_j(\mathbb{T})-r_j(\mathbb{T})}$ *sinon et* $r_j(\mathbb{T})$ *(resp* $c_j(\mathbb{T})$*) indique la ligne (resp colonne) de* j *dans le tableau de* $\mathbb{T}$ *contenant* j.

Un exemple

Les doubles-partitions de 2 sont $((1,1,0,0,\ldots),(0,\ldots)),((0,\ldots),(1,1,0,0,\ldots))((2,0,0,\ldots),(0,\ldots)),((0,\ldots),(2,0,0,\ldots))$ et $((1,0,\ldots),(1,0,\ldots))$ et elles correspondent aux doubles-diagrammes suivants : $\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\emptyset\right),\left(\emptyset,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right),\left(\square,\square\right),\left(\square\square,\emptyset\right)$ et $\left(\emptyset,\square\square\right)$.

On a $R_{(\square,\square)}(T)=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $R_{(\square,\square)}(S_1)=\begin{pmatrix}\frac{\alpha-1}{\beta+1} & \frac{\alpha\beta+1}{\beta+1}\\ \frac{\alpha+\beta}{\beta+1} & \frac{\alpha\beta-\beta}{\beta+1}\end{pmatrix}$.

Type	A	B
Corps de définition	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$.	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha, \beta)$.
Représentations irréductibles	Partitions de n.	Double-partitions de n.
Règle de Branchement	$V_{\lambda \mid \mathcal{H}_{A_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{\mu \subset \lambda} V_\mu$	$V_{\lambda \mid \mathcal{H}_{B_{n-1},\alpha,\beta}} = \bigoplus_{\mu \subset \lambda} V_\mu$
Représentation duale	$V_{\lambda'}$	$V_{(\lambda_2', \lambda_1')}$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type D

On prend ici $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$ avec α d'ordre strictement supérieur à $2n$.

Définition

On définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{D_n,\alpha}$ de type D comme la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{B_n,\alpha,1}$ engendré par $U = TT_1T, T_1, \dots T_{n-1}$. On a alors que $\mathcal{H}_{D_n,\alpha}$ est l'algèbre engendré par ces générateurs et qu'ils vérifient les relations suivantes :

1. $(U-\alpha)(U+1) = 0,$
2. $\forall i \in [|1, n-1|], (T_i - \alpha)(T_i + 1) = 0,$
3. $\forall i \in [|1, n-1|] \setminus \{2\}, UT_i = T_iU,$
4. $UT_2U = T_2UT_2,$
5. $\forall i \in [|1, n-2|], T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1},$
6. $\forall i, j \in [|1, n-1|], |i-j| > 1, T_iT_j = T_jT_i.$

Modèle de Hoefsmit

Proposition

Soit $\mathbb{T}$ un double-tableau standard associé à une double partition (λ_1, λ_2) de n. Pour $i \in [|1, n-1|]$, on note $m_i(\mathbb{T}) = \frac{\alpha - 1}{1-(-1)^{\delta_i}\alpha^{c_i - r_i + r_{i+1} - c_{i+1}}}$ où i (resp $i+1$) est dans la case (r_i, c_i) (resp (r_{i+1}, c_{i+1}) d'un des sous-tableaux de $\mathbb{T}$ et $\delta_i = 0$ si i et $i+1$ sont dans le même tableau et $\delta_i = 1$ sinon.
L'action des générateurs sur le double-tableau $\mathbb{T}$ est la suivante :

1. $U.\mathbb{T} = m_1(\mathbb{T})\mathbb{T} - (1 + m_1(\mathbb{T}))\tilde{\mathbb{T}}$, *avec* $\tilde{\mathbb{T}} = 0$ *si* $\mathbb{T}_{1\leftrightarrow 2}$ *est non standard et* $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_{1\leftrightarrow 2}$ *sinon,*
2. $\forall i \in [|1, n-1|]$, $S_i.\mathbb{T} = m_i(\mathbb{T})\mathbb{T} + (1 + m_i(\mathbb{T}))\tilde{\mathbb{T}}$ *avec* $\tilde{\mathbb{T}} = 0$ *si* $\mathbb{T}_{i\leftrightarrow i+1}$ *non standard et* $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_{i\leftrightarrow i+1}$ *sinon.*

Les représentations irréductibles sont alors indexées par les double-partitions (λ_1, λ_2) telles que $\lambda_1 > \lambda_2$ et $(\lambda_1, \lambda_1, +)$, $(\lambda_1, \lambda_1, -)$ pour les partitions λ_1 de $\frac{n}{2}$.

Règle de Branchement

Proposition

Soit $n \geq 5$ et (λ, μ) une double partition de n telle que $n_\lambda > n_\mu$ ou $n_\lambda = n_\mu$ et $\lambda > \mu$. On a alors :

1. *Si $n_\lambda > n_\mu + 1$ alors $V_{\lambda,\mu|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})\subset(\lambda,\mu)} V_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}$.*
2. *Si $n_\lambda = n_\mu + 1$ et $\mu \not\subset \lambda$ alors*
$$V_{\lambda,\mu|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{\tilde{\mu}\subset\mu} V_{\lambda,\tilde{\mu}} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\tilde{\lambda}\subset\lambda \\ \tilde{\lambda}>\mu}} V_{\tilde{\lambda},\mu} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\tilde{\lambda}\subset\lambda \\ \tilde{\lambda}<\mu}} V_{\mu,\tilde{\lambda}}.$$
3. *Si $n_\lambda = n_\mu + 1$ et $\mu \subset \lambda$ alors*
$$V_{\lambda,\mu|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{\tilde{\mu}\subset\mu} V_{\lambda,\tilde{\mu}} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\tilde{\lambda}\subset\lambda \\ \tilde{\lambda}>\mu}} V_{\tilde{\lambda},\mu} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\tilde{\lambda}\subset\lambda \\ \tilde{\lambda}<\mu}} V_{\mu,\tilde{\lambda}} \bigoplus (V_{\mu,\mu,+} \bigoplus V_{\mu,\mu,-}).$$
4. *Si $n_\lambda = n_\mu$ et $\lambda > \mu$ alors $V_{\lambda,\mu|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{\tilde{\mu}\subset\mu} V_{\lambda,\tilde{\mu}} \bigoplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}\subset\lambda} V_{\mu,\tilde{\lambda}}$.*
5. *Si $\lambda = \mu$ alors $V_{\lambda,\lambda,+|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = V_{\lambda,\lambda,-|\mathcal{H}_{D_{n-1},\alpha}} = \bigoplus_{\tilde{\mu}\subset\mu} V_{\lambda,\tilde{\mu}}$.*

Définition des W-graphes

Soit W un groupe de Coxeter d'ensemble de générateurs S. Soit $\mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}}$ son algèbre de Hecke associée sur $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p((\alpha_s)_{s\in S})$ et $\mathbb{F}_{\tilde{q}}\mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}} = \mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}} \bigotimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{\tilde{q}}$ où $\mathbb{F}_{\tilde{q}} = \mathbb{F}_p((\sqrt{\alpha_s})_{s\in S})$.

Définition (Kazdhan Lusztig 1979)

Un W-graphe est la donnée d'un triplet (X, I, μ) tel que

1. *X est un ensemble muni d'une application I de X dans $\mathcal{P}(S)$,*
2. *μ est une application de $(X \times X \setminus D(X)) \times S$ dans $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$.*

On impose que tout élément de l'image de μ soit invariant par l'automorphisme de $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$ qui envoie $\sqrt{\alpha_s}$ sur $\sqrt{\alpha_s}^{-1}$ pour tout $s \in S$. Soit V un $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$-espace vectoriel de base $(e_y)_{y\in\mathcal{C}}$ et pour $s \in S$, on définit l'application linéaire $\rho_s : V \to V$ par

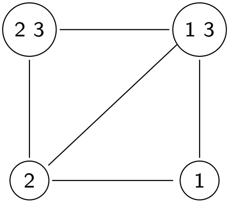
$$\begin{aligned} e_y &\mapsto -e_y && \text{si } s \in I(y),\\ e_y &\mapsto \alpha e_y + \sum_{x\in\mathcal{C}, s\in I(x)} \sqrt{\alpha_s}\mu^s_{x,y} e_x && \text{si } s \notin I(y). \end{aligned}$$

On impose que $T_s \mapsto \rho_s$ soit une représentation de $\mathbb{F}_{\tilde{q}}\mathcal{H}_{W,(\alpha_s)_{s\in S}}$.

Exemple de W-graphe

On prend $W = H_3$, il y a une seule classe de conjugaison parmi les générateurs donc un seul paramètre $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}$, on a $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$ et $\mathbb{F}_{\tilde{q}} = \mathbb{F}_p(\sqrt{\alpha})$. On a alors une représentation de dimension 4 donnée par le W-graphe $\{X, I, \mu\}$ avec $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $I(x_1) = \{s_2, s_3\}$, $I(x_2) = \{s_1, s_3\}$, $I(x_3) = \{s_1\}$, $I(x_4) = \{s_2\}$, $\mu_{x_1,x_2} = \mu_{x_2,x_3} = \mu_{x_3,x_4} = \mu_{x_4,x_1} = \mu_{x_4,x_2} = 1$, μ symétrique indépendant de S et μ envoie les autres couples sur 0. On peut le représenter de la manière suivante :

$4'_r$



On a alors $\rho_{4'_r}(T_1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha} & -1 & 0 & \sqrt{\alpha} \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

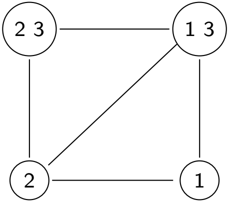
Représentation duale

À un W-graphe G, on peut associer un W-graphe dual $G^\star$ qui correspond à une représentation isomorphe à la représentation $\rho_G^\star = \rho_G \circ \gamma$ où $\gamma(T_s) = -\alpha T_s^{-1}$.

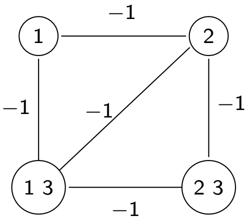
Si $G = (X, I, \mu)$ alors $G^\star$ est donné par $(X, \tilde{I}, \tilde{\mu})$ avec pour tout $x \in X, \tilde{I}(x) = S \setminus I(x)$ et pour tout $x, y \in X$, $\tilde{\mu}_{x,y} = -\mu_{y,x}$.

On a par exemple

$4'_r$



$4'^\star_r$



W-graphes 2-colorables

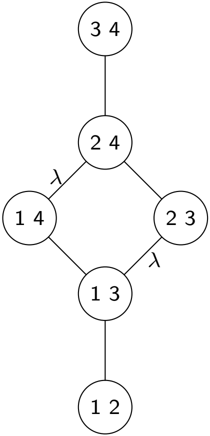
Si un W-graphe (X, I, μ) est 2-colorable alors on a un isomorphisme entre la représentation associée à (X, I, μ) et la représentation associée à $(X, I, -\mu)$ donné par l'application $e_{x_i} \mapsto \omega(e_{x_i})e_{x_i}$ en coloriant les sommets par 1 ou -1.

On a alors que si le W-graphe est 2-colorable et il existe un isomorphisme de graphe ψ entre les graphes donnés par $G = (X, I, \mu)$ et $(X, \tilde{I}, \mu)$ alors il existe une forme bilinéaire non-dégénérée telle que $(T_i e_{x_j}, T_i e_{x_l}) = (-\alpha)(e_{x_j}, e_{x_l})$ et la nature de cette forme bilinéaire ne dépend que de $\omega(e_{x_1})\omega(\psi(e_{x_1}))$.

Exemple

On considère le H_4-graphe suivant où $\lambda = \xi + \xi^{-1} + 1$ avec ξ une racine cinquième de l'unité :

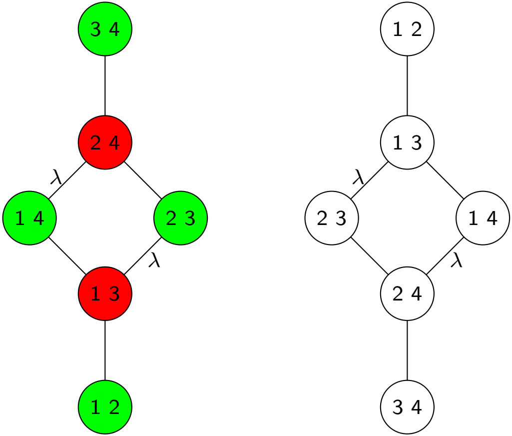
6_s



Exemple

On considère le H_4-graphe suivant où $\lambda = \xi + \xi^{-1} + 1$ avec ξ une racine cinquième de l'unité :

6_s



Méthode générale pour la restriction à un sous-groupe parabolique

Si on a $W =< S >$ un groupe de Coxeter et $W_0 =< S' > \leq W$ un sous-groupe de W qui soit un groupe de Coxeter. Si $G = (X, I, \mu)$ est un $W - graphe$ alors $\tilde{G} = (X, \tilde{I}, \tilde{mu})$ est un W_0-graphe avec pour tout $x \in X, \tilde{I}(x) = I(x) \cap S'$ et $\tilde{\mu}_{x,y} = 0$ si $\tilde{I}(y) \subset \tilde{I}(x)$.

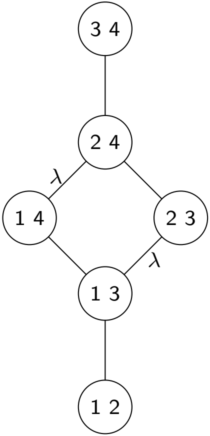
On décompose ensuite $(X, \tilde{I}, \tilde{\mu})$ en composantes connexes et les matrices $\rho_{\tilde{G}}(T_i)$ sont alors en forme triangulaire supérieure par blocs. Le $\mathbb{F}_{\tilde{q}} W_0$-module $\tilde{V}$ associé à $\tilde{G}$ est alors isomorphe au module $\bigoplus V_i$.

Problème : Les représentations associées aux composantes connexes ne sont pas forcément irréductibles.

Un exemple

$H_3 =< s_1, s_2, s_3 >\subset< s_1, s_2, s_3, s_4 >= H_4$.

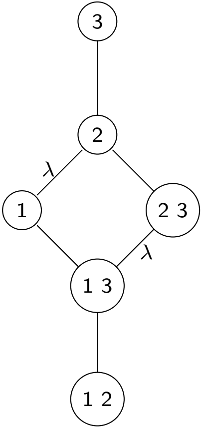
6_s



Un exemple

$H_3 =< s_1, s_2, s_3 >\subset< s_1, s_2, s_3, s_4 >= H_4$.

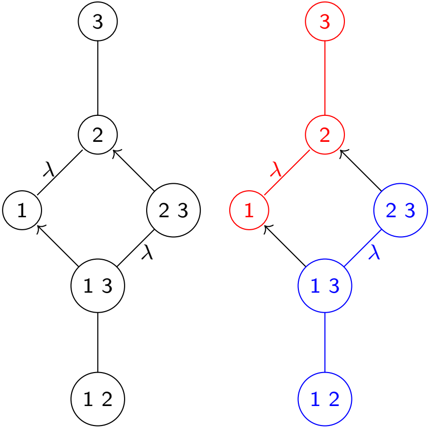
6_s



Un exemple

$H_3 =< s_1, s_2, s_3 >\subset< s_1, s_2, s_3, s_4 >= H_4.$

6_s

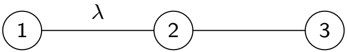


Un exemple

On a donc $\rho_{6_s|H_3} \simeq \rho_{3'_s} \times \rho^{\star}_{3'_s}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_6(\mathbb{F}_q)$ telle que pour $i \in [\![1,3]\!]$, on a

$$P\rho_{6_s}(T_i)P^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{3'_s}(T_i) & 0 \\ 0 & -\alpha({}^t\rho_{3'_s}(T_i)^{-1}) \end{pmatrix}$$

avec

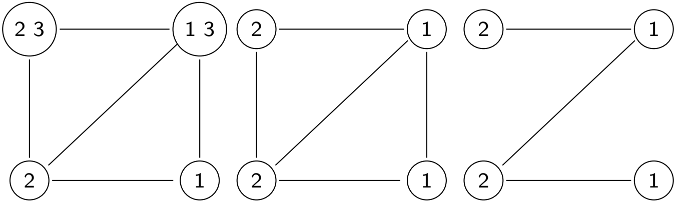


$3'_s$

Un autre exemple

$I_2(5) =< s_1, s_2 >\subset H_3 =< s_1, s_2, s_3 >$, $\beta = \xi + \xi^{-1}$ avec $\xi^5 = 1$.

$4'_r$



Il n'y a ici qu'une composante connexe et elle ne correspond pas à une représentation irréductible, on pose $(e'_1, e'_2) = (e_1 + (\beta+1)e_4, e_2 + (\beta+1)e_3)$ et $(e''_1, e''_2) = (e_1 - \beta e_4, e_2 - \beta e_3)$.

Dans cette base, la restriction de $4'_r$ à $\mathcal{H}_{I_2(5),\alpha}$ est représentée par le W-graphe suivant :