Catégorification de données $\mathbb{Z}$-modulaires

Abel Lacabanne

IMAG - Université de Montpellier

28 avril 2017

Donnée $\mathbb{Z}$-modulaire

Définition

Une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire est la donnée de :

- I un ensemble fini,
- $S \in M_I(\mathbb{C})$,
- $T \in M_I(\mathbb{C})$ diagonale,

Donnée $\mathbb{Z}$-modulaire

Définition

Une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire est la donnée de :

- I un ensemble fini,
- $S \in M_I(\mathbb{C})$,
- $T \in M_I(\mathbb{C})$ diagonale,

vérifiant les axiomes suivants :

(M1) I contient un élément distingué i_0 tel que, pour tout $i \in I$, $S_{i_0,i} \neq 0$,

(M2) I admet une involution $*$ fixant i_0 telle que $S_{i,j^*} = \overline{S_{i,j}}$,

(M3) S est symétrique et unitaire,

(M4) $S^4 = (ST)^3 = [S^2, T] = 1$ (S et T définissent une représentation de $SL_2(\mathbb{Z})$),

(M5) pour tous i,j et $k \in I$, $N_{i,j}^k := \sum_{l \in I} \frac{S_{l,i} S_{l,j} \overline{S_{l,k}}}{S_{l,i_0}} \in \mathbb{Z}$.

Les entiers $(N_{i,j}^k)_{i,j,k\in I}$ sont alors les constantes de structure d'une $\mathbb{Z}$-algèbre libre de rang $|I|$, appelée algèbre de fusion associée à (S, T) :

$$A = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}X_i \qquad X_i \cdot X_j = \sum_{k\in I} N_{i,j}^k X_k$$

Les entiers $(N_{i,j}^k)_{i,j,k\in I}$ sont alors les constantes de structure d'une $\mathbb{Z}$-algèbre libre de rang $|I|$, appelée algèbre de fusion associée à (S, T) :

$$A = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} X_i \qquad X_i \cdot X_j = \sum_{k\in I} N_{i,j}^k X_k$$

Comment construire des données modulaires ? Lusztig en construit grâce à une transformée de Fourier non abélienne associée à un groupe fini Γ.

Les entiers $(N_{i,j}^k)_{i,j,k \in I}$ sont alors les constantes de structure d'une $\mathbb{Z}$-algèbre libre de rang $|I|$, appelée algèbre de fusion associée à (S, T) :

$$A = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} X_i \qquad X_i \cdot X_j = \sum_{k \in I} N_{i,j}^k X_k$$

Comment construire des données modulaires ? Lusztig en construit grâce à une transformée de Fourier non abélienne associée à un groupe fini Γ.

Que signifie alors catégorifier ? Trouver une catégorie abélienne avec des propriétés sympathiques, de telle sorte que son groupe de Grothendieck est l'algèbre de fusion associée à (S, T).

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z} \colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),
- rigide : chaque objet a un dual à gauche et un dual à droite,

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z} \colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),
- rigide : chaque objet a un dual à gauche et un dual à droite,
- tressée : il existe un isomorphisme binaturel $c_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ vérifiant certains axiomes (hexagones),

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),
- rigide : chaque objet a un dual à gauche et un dual à droite,
- tressée : il existe un isomorphisme binaturel $c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ vérifiant certains axiomes (hexagones),
- enrubannée : il existe un isomorphisme naturel $\theta_X\colon X \to X$ tel que $\theta_{X\otimes Y} = \theta_X \otimes \theta_Y \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ et $\theta_{X^*} = (\theta_X)^*$,

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),
- rigide : chaque objet a un dual à gauche et un dual à droite,
- tressée : il existe un isomorphisme binaturel $c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ vérifiant certains axiomes (hexagones),
- enrubannée : il existe un isomorphisme naturel $\theta_X\colon X \to X$ tel que $\theta_{X\otimes Y} = \theta_X \otimes \theta_Y \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ et $\theta_{X^*} = (\theta_X)^*$,
- semi-simple avec un nombre fini d'objets simples (et d'autres conditions de finitude).

Un exemple : les catégories modulaires

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{C}$-linéaire. On suppose qu'elle est de plus :

- monoïdale : il existe un foncteur $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objet unité $\mathbb{1}$ et un associateur $\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ vérifiant certains axiomes (pentagone, ...),
- rigide : chaque objet a un dual à gauche et un dual à droite,
- tressée : il existe un isomorphisme binaturel $c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ vérifiant certains axiomes (hexagones),
- enrubannée : il existe un isomorphisme naturel $\theta_X\colon X \to X$ tel que $\theta_{X\otimes Y} = \theta_X \otimes \theta_Y \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ et $\theta_{X^*} = (\theta_X)^*$,
- semi-simple avec un nombre fini d'objets simples (et d'autres conditions de finitude).

Alors $I = Irr(\mathcal{C})$, $S_{i,j} := Tr(c_{j,i} \circ c_{i,j})$, $T_i := \theta_i^{-1} \in End(i)^\times = \mathbb{C}^\times$, $i_0 = \mathbb{1}$ et $*$ donné par la dualité forment une donnée modulaire. L'algèbre de fusion associée est alors l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}$. Les constantes de structures sont nécessairement positives.

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

Dans ce qui suit, on fixe H une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. On veut faire de $H - mod$ une catégorie modulaire :

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

Dans ce qui suit, on fixe H une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. On veut faire de $H - mod$ une catégorie modulaire :

- monoïdale : on veut prolonger la structure monoïdale des espaces vectoriels. On a besoin de $\varepsilon\colon H \longrightarrow \mathbb{C}$, donnant une structure de H-module à l'objet unité, et de $\Delta\colon H \longrightarrow H \otimes H$, donnant une structure de H-module aux produits tensoriels de H-modules. Ce sont des morphismes d'algèbres et certaines conditions (coassociativité, counité) doivent de plus être vérifiées. Ceci fait de H une bialgèbre.

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

Dans ce qui suit, on fixe H une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. On veut faire de $H - mod$ une catégorie modulaire :

- monoïdale : on veut prolonger la structure monoïdale des espaces vectoriels. On a besoin de $\varepsilon \colon H \longrightarrow \mathbb{C}$, donnant une structure de H-module à l'objet unité, et de $\Delta \colon H \longrightarrow H \otimes H$, donnant une structure de H-module aux produits tensoriels de H-modules. Ce sont des morphismes d'algèbres et certaines conditions (coassociativité, counité) doivent de plus être vérifiées. Ceci fait de H une bialgèbre.
- rigide : on veut munir le dual d'un espace vectoriel d'une structure de H-module. On utilise alors $S \colon H \longrightarrow H$ anti-morphisme d'algèbre ($(h \cdot \varphi)(x) = \varphi(S(h) \cdot x)$ ou $(h \cdot \varphi)(x) = \varphi(S^{-1}(h) \cdot x)$ si S est inversible). L'axiome de l'antipode doit alors être vérifié, et on a un dual à gauche et un dual à droite (qui ne sont pas nécessairement isomorphes comme H-modules !) ; H est une algèbre de Hopf.

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

- tressée : l'isomorphisme binaturel est réalisé par un élément inversible $R \in H \otimes H$ vérifiant certaines propriétés, dont l'équation de Yang-Baxter. On l'appelle R-matrice universelle, et H est une algèbre de Hopf tressée.

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

- tressée : l'isomorphisme binaturel est réalisé par un élément inversible $R \in H \otimes H$ vérifiant certaines propriétés, dont l'équation de Yang-Baxter. On l'appelle R-matrice universelle, et H est une algèbre de Hopf tressée.
- enrubannée : provient d'un élément $\theta \in H$ central ; θ_V est donné par l'action de θ^{-1} sur V. On dit que H est une algèbre de Hopf enrubannée.

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

- tressée : l'isomorphisme binaturel est réalisé par un élément inversible $R \in H \otimes H$ vérifiant certaines propriétés, dont l'équation de Yang-Baxter. On l'appelle R-matrice universelle, et H est une algèbre de Hopf tressée.
- enrubannée : provient d'un élément $\theta \in H$ central ; θ_V est donné par l'action de θ^{-1} sur V. On dit que H est une algèbre de Hopf enrubannée.
- semi-simplicité : H semi-simple...

$H - mod$ comme catégorie modulaire ?

- tressée : l'isomorphisme binaturel est réalisé par un élément inversible $R \in H \otimes H$ vérifiant certaines propriétés, dont l'équation de Yang-Baxter. On l'appelle R-matrice universelle, et H est une algèbre de Hopf tressée.
- enrubannée : provient d'un élément $\theta \in H$ central ; θ_V est donné par l'action de θ^{-1} sur V. On dit que H est une algèbre de Hopf enrubannée.
- semi-simplicité : H semi-simple...

On dispose alors d'une S-matrice associée à H, et les constantes de structure du groupe de Grothendieck sont positives...

Une famille d'algèbres de Hopf enrubannées : les doubles de Drinfeld

Toujours H de dimension finie. On peut munir l'espace vectoriel $H \otimes H^*$ d'une structure d'algèbre de Hopf de telle sorte que $H \otimes 1$ en soit une sous-algèbre de Hopf et $1 \otimes H^*$ aussi (avec le coproduit renversé). On l'appelle double de Drinfeld de H et on le note $D(H)$.

Une famille d'algèbres de Hopf enrubannées : les doubles de Drinfeld

Toujours H de dimension finie. On peut munir l'espace vectoriel $H \otimes H^*$ d'une structure d'algèbre de Hopf de telle sorte que $H \otimes 1$ en soit une sous-algèbre de Hopf et $1 \otimes H^*$ aussi (avec le coproduit renversé). On l'appelle double de Drinfeld de H et on le note $D(H)$.

C'est toujours une algèbre de Hopf tressée. Si (e_i) et une base de H et (e^i) est sa base duale, la R-matrice est donnée par :

$$R := \sum e_i \otimes e^i \in D(H) \otimes D(H)$$

Une famille d'algèbres de Hopf enrubannées : les doubles de Drinfeld

Toujours H de dimension finie. On peut munir l'espace vectoriel $H \otimes H^*$ d'une structure d'algèbre de Hopf de telle sorte que $H \otimes 1$ en soit une sous-algèbre de Hopf et $1 \otimes H^*$ aussi (avec le coproduit renversé). On l'appelle double de Drinfeld de H et on le note $D(H)$.

C'est toujours une algèbre de Hopf tressée. Si (e_i) et une base de H et (e^i) est sa base duale, la R-matrice est donnée par :

$$R := \sum e_i \otimes e^i \in D(H) \otimes D(H)$$

Il existe une version catégorique de cette construction : le centre d'une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Une chose rassurante : $\mathcal{Z}(H - mod) = D(H) - mod$. Pour catégorifier, on peut (naïvement) chercher une algèbre de Hopf H dont le double est enrubannée et considérer $D(H) - mod = \mathcal{Z}(H - mod)$.

Une digression et motivation : les groupes réductifs finis

On considère un groupe réductif fini. Lusztig a défini des notions de caractères unipotents, de faisceaux caractères unipotents et a construit une matrice de passage entre deux bases de fonctions centrales (une étant les caractères unipotents).

Une digression et motivation : les groupes réductifs finis

On considère un groupe réductif fini. Lusztig a défini des notions de caractères unipotents, de faisceaux caractères unipotents et a construit une matrice de passage entre deux bases de fonctions centrales (une étant les caractères unipotents).
Cette matrice est diagonale par blocs (familles de caractères) et correspond à la S-matrice d'une donnée modulaire.

Une digression et motivation : les groupes réductifs finis

On considère un groupe réductif fini. Lusztig a défini des notions de caractères unipotents, de faisceaux caractères unipotents et a construit une matrice de passage entre deux bases de fonctions centrales (une étant les caractères unipotents).
Cette matrice est diagonale par blocs (familles de caractères) et correspond à la S-matrice d'une donnée modulaire.

Exemple

Dans Sp_4, il existe une famille de caractères unipotents $\{\varepsilon_s, \varepsilon_t, \chi, \theta_{10}\}$ et la matrice S associée est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette donnée modulaire est catégorifiée par $D(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Les Spets

Dans la théorie des groupes réductifs finis, on peut montrer que la théorie des représentations est contrôlée par le groupe de Weyl : les représentations uniponentes ne “dépendent que du groupe de Weyl” et pas du nombre premier p ou de sa puissance.

Les Spets

Dans la théorie des groupes réductifs finis, on peut montrer que la théorie des représentations est contrôlée par le groupe de Weyl : les représentations uniponentes ne “dépendent que du groupe de Weyl” et pas du nombre premier p ou de sa puissance.

En 1993, Broué, Malle et Michel ont réussi à faire des choses similaires pour certains groupes de réflexions complexes : degrés unipotents, valeurs propres du Froebenius, familles, matrices de Fourier dans le cas de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le “groupe réductif associé” est ce que l'on appelle un Spets.

Les Spets

Dans la théorie des groupes réductifs finis, on peut montrer que la théorie des représentations est contrôlée par le groupe de Weyl : les représentations uniponentes ne "dépendent que du groupe de Weyl" et pas du nombre premier p ou de sa puissance.

En 1993, Broué, Malle et Michel ont réussi à faire des choses similaires pour certains groupes de réflexions complexes : degrés unipotents, valeurs propres du Froebenius, familles, matrices de Fourier dans le cas de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le "groupe réductif associé" est ce que l'on appelle un Spets.

En 1994, Malle définit de telles données pour les groupes $G(d, 1, n)$, $G(d, d, n)$ et des versions tordues, en généralisant la combinatoire des symboles introduite par Lusztig pour les groupes de type B. Grande question : a-t-on une catégorification des matrices de Fourier ? C'est tout le sujet de la thèse.

Les Spets

Dans la théorie des groupes réductifs finis, on peut montrer que la théorie des représentations est contrôlée par le groupe de Weyl : les représentations uniponentes ne “dépendent que du groupe de Weyl” et pas du nombre premier p ou de sa puissance.

En 1993, Broué, Malle et Michel ont réussi à faire des choses similaires pour certains groupes de réflexions complexes : degrés unipotents, valeurs propres du Froebenius, familles, matrices de Fourier dans le cas de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le “groupe réductif associé” est ce que l'on appelle un Spets.

En 1994, Malle définit de telles données pour les groupes $G(d, 1, n)$, $G(d, d, n)$ et des versions tordues, en généralisant la combinatoire des symboles introduite par Lusztig pour les groupes de type B. Grande question : a-t-on une catégorification des matrices de Fourier ? C'est tout le sujet de la thèse.

En 2012, Broué, Malle et Michel ont construit ces données pour certains groupes exceptionnels, dits spetsiaux.

Le cas d'une famille de $G(d, 1, n)$

Une famille de caractères unipotents généralise le comportement des cuspidaux de Sp_{2n} : on se fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $n = k(k+1)$.

Le cas d'une famille de $G(d, 1, n)$

Une famille de caractères unipotents généralise le comportement des cuspidaux de Sp_{2n} : on se fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $n = k(k+1)$.

Proposition

Il existe une famille de caractères unipotents associés à $G(d, 1, n)$ de cardinal d^{2k} dont la matrice de Fourier est catégorifiée par $D((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)$.

Le cas d'une famille de $G(d, 1, n)$

Une famille de caractères unipotents généralise le comportement des cuspidaux de Sp_{2n} : on se fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $n = k(k+1)$.

Proposition

Il existe une famille de caractères unipotents associés à $G(d, 1, n)$ de cardinal d^{2k} dont la matrice de Fourier est catégorifiée par $D((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)$.

Le cas $d = 2$ est bien connu, c'est une famille de Sp_{2n} qui a un caractère unipotent cuspidal. Dans le cas de $G(d, 1, n)$, il y a plus de caractères cuspidaux ($d - 1$ dans le cas de $G(d, 1, 2)$).

Les S-matrices dans le cas de $G(d, 1, n)$

On note S la matrice $\frac{1}{\sqrt{d}}(\zeta^{ij})_{0\leq i,j<d}$. C'est la table de caractère renormalisée du groupe cyclique $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Pour des entiers $1 \leq n_1, \ldots, n_r \leq d$, on considère la matrice :

$$S_{n_1,\ldots,n_r} = \Lambda^{n_1} S \otimes \ldots \Lambda^{n_r} S.$$

Les S-matrices dans le cas de $G(d,1,n)$

On note S la matrice $\frac{1}{\sqrt{d}}(\zeta^{ij})_{0\leq i,j<d}$. C'est la table de caractère renormalisée du groupe cyclique $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Pour des entiers $1 \leq n_1, \ldots, n_r \leq d$, on considère la matrice :

$$S_{n_1,\ldots,n_r} = \Lambda^{n_1} S \otimes \ldots \Lambda^{n_r} S.$$

Les matrices de Fourier associées aux familles de caractères unipotents de $G(d,1,n)$ sont données par des matrices extraites de $S_{n_1,\ldots n_r}$, les entiers $n_1, \ldots, n_r$ dépendant de la famille

Les S-matrices dans le cas de $G(d, 1, n)$

On note S la matrice $\frac{1}{\sqrt{d}}(\zeta^{ij})_{0 \leq i,j < d}$. C'est la table de caractère renormalisée du groupe cyclique $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Pour des entiers $1 \leq n_1, \ldots, n_r \leq d$, on considère la matrice :

$$S_{n_1,\ldots,n_r} = \Lambda^{n_1} S \otimes \ldots \Lambda^{n_r} S.$$

Les matrices de Fourier associées aux familles de caractères unipotents de $G(d, 1, n)$ sont données par des matrices extraites de $S_{n_1,\ldots n_r}$, les entiers $n_1, \ldots, n_r$ dépendant de la famille (on ne prend qu'une ligne et une colonne sur d, on change certains signes et on multiplie par une constante globale).

Les S-matrices dans le cas de $G(d, 1, n)$

On note S la matrice $\frac{1}{\sqrt{d}}(\zeta^{ij})_{0\leq i,j<d}$. C'est la table de caractère renormalisée du groupe cyclique $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Pour des entiers $1 \leq n_1, \ldots, n_r \leq d$, on considère la matrice :

$$S_{n_1,\ldots,n_r} = \Lambda^{n_1} S \otimes \ldots \Lambda^{n_r} S.$$

Les matrices de Fourier associées aux familles de caractères unipotents de $G(d, 1, n)$ sont données par des matrices extraites de $S_{n_1,\ldots n_r}$, les entiers $n_1, \ldots, n_r$ dépendant de la famille (on ne prend qu'une ligne et une colonne sur d, on change certains signes et on multiplie par une constante globale).
On va expliquer plus en détail le cas de $G(d, 1, 1)$, le groupe cyclique, dû à Bonnafé et Rouquier.

Le groupe cyclique

On fixe $d \geq 2$, ζ une racine primitive p-ième de l'unité et on traite le cas de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Il y a deux familles de caractères unipotents : une triviale et une de cardinal $\frac{d(d-1)}{2}$. Les entiers correspondants à la seconde famille sont $n_1 = 2, n_2 = d - 1$.

Le groupe cyclique

On fixe $d \geq 2$, ζ une racine primitive p-ième de l'unité et on traite le cas de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Il y a deux familles de caractères unipotents : une triviale et une de cardinal $\frac{d(d-1)}{2}$. Les entiers correspondants à la seconde famille sont $n_1 = 2, n_2 = d - 1$.

Définition (Malle)

Soit $I = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq d\}$. On définit :

- $S_{(i,j),(i',j')} = \frac{\varepsilon_{(i,j),(i',j')}}{d}(\zeta^{-ij'-ji'} - \zeta^{-ii'-jj'})$,
- $T_{(i,j)} = \zeta^{ij}$, où $\varepsilon_{(i,j),(i',j')} \in \{\pm 1\}$.

Le groupe cyclique

On fixe $d \geq 2$, ζ une racine primitive p-ième de l'unité et on traite le cas de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Il y a deux familles de caractères unipotents : une triviale et une de cardinal $\frac{d(d-1)}{2}$. Les entiers correspondants à la seconde famille sont $n_1 = 2, n_2 = d - 1$.

Définition (Malle)

Soit $I = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq d\}$. On définit :

- $S_{(i,j),(i',j')} = \frac{\varepsilon_{(i,j),(i',j')}}{d}(\zeta^{-ij'-ji'} - \zeta^{-ii'-jj'})$,
- $T_{(i,j)} = \zeta^{ij}$, où $\varepsilon_{(i,j),(i',j')} \in \{\pm 1\}$.

Fait (Malle, Cuntz)

C'est une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Cette donnée n'est pas $\mathbb{N}$-modulaire en général. On n'a aucun espoir de la catégorifier par un double de Drinfeld. Néanmoins...

Une catégorification par une catégorie stable

On peut donner un sens au groupe de Grothendieck pour des catégories non abéliennes : les catégories triangulées. Par contre, il est compliqué de savoir quand ce groupe est libre, de rang fini, etc... Mais l'avantage est l'introduction de signes négatifs : on peut espérer avoir des constantes de structures négatives.

Une catégorification par une catégorie stable

On peut donner un sens au groupe de Grothendieck pour des catégories non abéliennes : les catégories triangulées. Par contre, il est compliqué de savoir quand ce groupe est libre, de rang fini, etc... Mais l'avantage est l'introduction de signes négatifs : on peut espérer avoir des constantes de structures négatives.

Théorème (Bonnafé-Rouquier)

Il existe une catégorie triangulée "sympathique" catégorifiant la donnée modulaire de Malle.

Une catégorification par une catégorie stable

On peut donner un sens au groupe de Grothendieck pour des catégories non abéliennes : les catégories triangulées. Par contre, il est compliqué de savoir quand ce groupe est libre, de rang fini, etc... Mais l'avantage est l'introduction de signes négatifs : on peut espérer avoir des constantes de structures négatives.

Théorème (Bonnafé-Rouquier)

Il existe une catégorie triangulée "sympathique" catégorifiant la donnée modulaire de Malle.

On va expliquer comment est construite cette catégorie. L'algèbre de Taft B est la $\mathbb{C}-alg\grave{e}bre$ définie par générateurs et relations :

- générateurs : E et K,
- relations : $KE = \zeta EK$, $E^d = 0$ et $K^d = 1$.

C'est le Borel d'une version finie dimensionnelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. C'est une algèbre de Hopf :

$$\begin{array}{ccc} \Delta(K) = K \otimes K & \varepsilon(K) = 1 & S(K) = K^{-1} \\ \Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K & \varepsilon(E) = 0 & S(E) = -EK^{-1} \end{array}$$

Une catégorification par une catégorie stable

On considère son double de Drinfeld, qui a alors pour présentation :

- générateurs : E, K, F et z,
- relations : $K^d = z^d = 1$, $E^d = F^d = 0$, $KE = \zeta EK$, $KF = \zeta FK$, $[E, F] = K - zK^{-1}$ et z est central.

Une catégorification par une catégorie stable

On considère son double de Drinfeld, qui a alors pour présentation :

- générateurs : E, K, F et z,
- relations : $K^d = z^d = 1$, $E^d = F^d = 0$, $KE = \zeta EK$, $KF = \zeta FK$, $[E, F] = K - zK^{-1}$ et z est central.

Cette algèbre se surjecte sur une version finie dimensionnelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Sa catégorie de modules n'est pas enrubannée, mais on dispose tout de même de traces quantiques permettant de définir une S-matrice.

Une catégorification par une catégorie stable

On considère son double de Drinfeld, qui a alors pour présentation :

- générateurs : E, K, F et z,
- relations : $K^d = z^d = 1$, $E^d = F^d = 0$, $KE = \zeta EK$, $KF = \zeta FK$, $[E, F] = K - zK^{-1}$ et z est central.

Cette algèbre se surjecte sur une version finie dimensionnelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Sa catégorie de modules n'est pas enrubannée, mais on dispose tout de même de traces quantiques permettant de définir une S-matrice. On calcule alors les modules simples. On définit pour $l \in \{1, \dots, d\}$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ un module $M_{l,p}$ de dimension l dont les actions s'écrivent :

- $K \mapsto \zeta^p \mathrm{diag}(\zeta^{l-1}, \zeta^{l-2}, \dots, 1)$,
- $z \mapsto \zeta^{2p+l-1} id$,
- $E \mapsto \mathrm{J}^+(1, \dots, 1)$,
- $F \mapsto \mathrm{J}^-(x_1, \dots, x_{l-1})$, avec x_i non nul.

On considère son double de Drinfeld, qui a alors pour présentation :

- générateurs : E, K, F et z,
- relations : $K^d = z^d = 1$, $E^d = F^d = 0$, $KE = \zeta EK$, $KF = \zeta FK$, $[E, F] = K - zK^{-1}$ et z est central.

Cette algèbre se surjecte sur une version finie dimensionnelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Sa catégorie de modules n'est pas enrubannée, mais on dispose tout de même de traces quantiques permettant de définir une S-matrice. On calcule alors les modules simples. On définit pour $l \in \{1, \ldots, d\}$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ un module $M_{l,p}$ de dimension l dont les actions s'écrivent :

- $K \mapsto \zeta^p \mathrm{diag}(\zeta^{l-1}, \zeta^{l-2}, \ldots, 1)$,
- $z \mapsto \zeta^{2p+l-1} id$,
- $E \mapsto \mathrm{J}^+(1, \ldots, 1)$,
- $F \mapsto \mathrm{J}^-(x_1, \ldots, x_{l-1})$, avec x_i non nul.

Proposition

$Irr(D(B))$ est en bijection avec $\{1, \ldots, d\} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Une catégorification par une catégorie stable

On note R la R-matrice associée à $D(B)$, $R = \sum e_i \otimes e^i$, $u = \sum S(e^i)e_i$ l'élément de Drinfeld et $\theta = zK^{-1}u$. Cet élément n'est pas un élément ruban, mais presque : il ne vérifie pas $S(\theta) = \theta$ mais $S(\theta) = z^{-1}\theta$. On dispose alors de deux traces quantiques pour $f : M \longrightarrow M$:

- $Tr^+(f) = Tr(z^{-1}Kf, M)$,
- $Tr^-(f) = Tr(zK^{-1}f, M)$.

Une catégorification par une catégorie stable

On note R la R-matrice associée à $D(B)$, $R = \sum e_i \otimes e^i$, $u = \sum S(e^i)e_i$ l'élément de Drinfeld et $\theta = zK^{-1}u$. Cet élément n'est pas un élément ruban, mais presque : il ne vérifie pas $S(\theta) = \theta$ mais $S(\theta) = z^{-1}\theta$. On dispose alors de deux traces quantiques pour $f\colon M \longrightarrow M$:

- $Tr^+(f) = Tr(z^{-1}Kf, M)$,
- $Tr^-(f) = Tr(zK^{-1}f, M)$.

En utilisant la trace positive, on dispose d'une S-matrice S^+ et en notant $\varphi(i,j) = (j-i, i)$, on :

$$S^{Malle}_{(i,j),(i',j')} = \mathrm{cte} S^+_{\varphi(i,j),\varphi(i',j')}.$$

Une catégorification par une catégorie stable

On note R la R-matrice associée à $D(B)$, $R = \sum e_i \otimes e^i$, $u = \sum S(e^i)e_i$ l'élément de Drinfeld et $\theta = zK^{-1}u$. Cet élément n'est pas un élément ruban, mais presque : il ne vérifie pas $S(\theta) = \theta$ mais $S(\theta) = z^{-1}\theta$. On dispose alors de deux traces quantiques pour $f : M \longrightarrow M$:

- $Tr^+(f) = Tr(z^{-1}Kf, M)$,
- $Tr^-(f) = Tr(zK^{-1}f, M)$.

En utilisant la trace positive, on dispose d'une S-matrice S^+ et en notant $\varphi(i,j) = (j-i, i)$, on :

$$S^{Malle}_{(i,j),(i',j')} = \mathrm{cte} S^+_{\varphi(i,j),\varphi(i',j')}.$$

Le seul souci est que φ n'est pas surejctive. On a trop de $D(B)$-modules simples, il faut en tuer : on tue les projectifs grâce à la catégorie stable $D(B) - stab$. C'est la catégorie avec objets et morphismes :

- objets : les $D(B)$-modules (toujours de dimension finie),
- morphismes : $Hom_{D(B)-stab}(M,N) = Hom_{D(B)-mod}(M,N)/I(M,N)$ où $I(M,N)$ est le sous-groupe des morphismes de M dans N qui se factorisent par un module projectif.

En particulier, l'identité d'un module projectif est nul : on a tué les projectifs.

Quelles sont alors les enveloppes projectives des modules simples ?

Une catégorification par une catégorie stable

Quelles sont alors les enveloppes projectives des modules simples ?

Proposition (Bonnafé-Rouquier)

Pour tout p, $M_{d,p}$ est projectif. Pour $1 \leq l < d$ la couverture projective de $M_{l,p}$ est de dimension $2d$ et ses constituants simples sont $M_{l,p}$ et $M_{d-l,l+p}$ avec multiplicité 2.

Une catégorification par une catégorie stable

Quelles sont alors les enveloppes projectives des modules simples ?

Proposition (Bonnafé-Rouquier)

Pour tout p*,* $M_{d,p}$ *est projectif. Pour* $1 \leq l < d$ *la couverture projective de* $M_{l,p}$ *est de dimension* $2d$ *et ses constituants simples sont* $M_{l,p}$ *et* $M_{d-l,l+p}$ *avec multiplicité* 2*.*

Une catégorie stable est triangulée, et elle hérite ici des structures additionnelles de $D(B) - mod$.

Une catégorification par une catégorie stable

Quelles sont alors les enveloppes projectives des modules simples ?

Proposition (Bonnafé-Rouquier)

Pour tout p, $M_{d,p}$ est projectif. Pour $1 \leq l < d$ la couverture projective de $M_{l,p}$ est de dimension $2d$ et ses constituants simples sont $M_{l,p}$ et $M_{d-l,l+p}$ avec multiplicité 2.

Une catégorie stable est triangulée, et elle hérite ici des structures additionnelles de $D(B) - mod$.

Proposition

Le groupe de Grothendieck de $D(B) - mod$ est $\bigoplus_{l,p} \mathbb{Z}[M_{l,p}]$ et celui de $D(B) - stab$ est le quotient par les relations $[M_{d,p}] = 0$ et
$2([M_{l,p}] + [M_{d-l,l+p}]) = 0$.
De plus, il existe un quotient de $D(B) - stab$ qui permet de tuer la 2-torsion. Cette catégorie catégorifie alors la donnée modulaire de Malle.

Perspectives

- Essayer de continuer la catégorification pour les rangs supérieurs : $G(d, 1, 2)$, voire $G(d, 1, n)$?

Perspectives

- Essayer de continuer la catégorification pour les rangs supérieurs : $G(d, 1, 2)$, voire $G(d, 1, n)$?

- Donner un cadre général de catégories triangulées monoïdales : des choses sont surprenantes, par exemple la trace n'est pas toujours additive...

Perspectives

- Essayer de continuer la catégorification pour les rangs supérieurs : $G(d,1,2)$, voire $G(d,1,n)$?

- Donner un cadre général de catégories triangulées monoïdales : des choses sont surprenantes, par exemple la trace n'est pas toujours additive...

- Le cas des groupes exceptionnels ?